Nova Série
BOLETIM
DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Bol. Soc. Bras. Mat., Vol. 30, N. 1, 95-98

Une remarque sur la génération du groupe de Cremona

Ivan Pan

Resumé. On montre que tout ensemble de générateurs du groupe de Cremona de l'espace projectif de dimension plus grande que 2 doit contenir un nombre infini non dénombrable de transformations non triviales.

Mots Clef: Birationnelle, Cremona, groupe.

Abstract. We show that any set of generators of the Cremona group of $\mathbf{P}^n$ with n greater than 2 contains an infinite non numerable number of non trivial transformations.

Keywords: Birational, Cremona, group.

1. Énoncé et preuve du résultat.

Si n est un entier positif, on désigne par $\mathbf{P}^n$ l'espace projectif de dimension n sur un corps k algébriquement clos et de caractéristique zéro; on notera $[x_0, \ldots, x_n]$ le point de $\mathbf{P}^n$ de coordonnées homogènes $x_0, \ldots, x_n$.

On rappelle qu'une application rationnelle

$$T : \mathbf{P}^n \dashrightarrow \mathbf{P}^n,$$

peut être représentée comme

$$T(x) = [f_0(x), \ldots, f_n(x)], \quad x \in \mathbf{P}^n \backslash \{f_0 = \cdots = f_n = 0\}$$

où $f_0, \ldots, f_n$ sont des polynômes homogènes du même degré $deg(T)$ et sans diviseurs communs; l'entier $deg(T)$ s'appelle le degré de l'application. On dit que T est une *transformation de Cremona* (de $\mathbf{P}^n$) si

Received 18 March 1998.

Au moment de la réalisation de ce travail l'auteur était attaché à l'IMUFRGS en qualité de boursier du CNPq.

elle possède une inverse aussi rationnelle (i.e. si elle est birationnelle): algébriquement, cela équivaut à demander que le corps engendré sur k par les $\frac{f_i}{f_0}$ noté

$$k(T) := k(\frac{f_1}{f_0}, \dots, \frac{f_n}{f_0}),$$

soit le corps de fractions $k(\mathbf{P}^n) := k(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$ de $\mathbf{P}^n$; on note $\mathbf{Cr}(\mathbf{P}^n)$ le *groupe de Cremona* de $\mathbf{P}^n$.

Le cas $n = 1$ est banal: $\mathbf{Cr}(\mathbf{P}^1) = PGL(2)$. Si $n = 2$ par un théorème célèbre de M.Noether tout élément de $\mathbf{Cr}(\mathbf{P}^2)$ est de la forme

$$\varphi_1 \circ F \circ \cdots \circ \varphi_r \circ F \circ \varphi_{r+1}$$

avec $F = [x_1x_2, x_0x_2, x_0x_1]$ et $\varphi_i \in PGL(3)$ $\forall i$. Ce théorème ne se généralise pas au cas où $n \geq 3$; plus précisément on démontrera, ce qui est d'ailleurs le but de cette note, le résultat suivant (pour $n = 3$ un résultat dans cette direction est annoncé dans [chap.XVI,§32, **2**]; pour d'autres commentaires voir [§III, **3**])

Théorème 1. *Soit $n \geq 3$. Tout ensemble de générateurs de $\mathbf{Cr}(\mathbf{P}^n)$ doit contenir un nombre infini et non dénombrable de transformations de degré > 1.*

Pour ce faire on a besoin de quelques résultats qui ont de l'intérêt en soi. Voici le premier qui en est un sur l'existence de transformations de Cremona.

Si $g, q \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ et $t_1, \dots, t_n \in k[x_1, \dots, x_n]$ sont des polynômes homogènes avec $deg(g) = deg(qt_i)$ pour tout i, on note $T_{g,q,t} : \mathbf{P}^n \dashrightarrow \mathbf{P}^n$ et $\bar{T} : \mathbf{P}^{n-1} \dashrightarrow \mathbf{P}^{n-1}$ les applications rationnelles définies respectivement par

$$T_{g,q,t} := [g, qt_1, \dots, qt_n], \text{ et } \bar{T} = [t_1, \dots, t_n].$$

Lemme 2. *Soient d, l des entiers avec $d \geq l + 1 \geq 2$. Considérons des polynômes homogènes sans facteurs communs $g, q \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$, de degrés d, l respectivement, et $t_1, \dots, t_n \in k[x_1, \dots, x_n]$, de degrés $d - l$. Suppossons que $g = x_0g_{d-1} + g_d$ et $q = x_0q_{l-1} + q_l$ avec $g_{d-1}, g_d, q_{l-1}, q_l \in k[x_1, \dots, x_n]$ et $g_{d-1} \neq 0$ ou $q_{l-1} \neq 0$. Alors $T_{g,q,t}$ est de Cremona si et seulement si $\bar{T}$ est de Cremona.*

Preuve. D'une part $k(F) = k(\bar{F})(\alpha)$ avec $\alpha := g/qt_1$. D'autre part puisque $pgcd(g, q) = 1$, l'hypothèse sur g_{d-1} et q_{l-1} équivaut à $g_{d-1}q_l - g_d q_{l-1} \neq 0$; et donc $\alpha \in PGL(k\left(\mathbf{P}^{n-1}\right), 2)$. On en déduit l'assertion. □

Remarque. Les transformations construites comme dans le lemme ci-dessus sont étudiées détaillement dans [**4**].

On rappelle que si $S \subset \mathbf{P}^n$ est une hypersurface d'équation $q' = 0$ et $P \in \mathbf{P}^n$, la multiplicité de S en P est l'ordre d'annulation de q' en P.

Corollaire 3. *Soit $n \geq 2$. Soient $S \subset \mathbf{P}^n$ une hypersurface de degré $l \geq 1$ qui possède un point de multiplicité $\geq l-1$ et d un entier $\geq l+1$; notons O ce point. Alors, il existe une transformation de Cremona de degré d qui contracte cette hypersurface en un point.*

Preuve. Sans perte de généralité on peut supposer $O := [1, 0, \ldots, 0]$. Notons $q' = 0$ l'équation de S et prenons $h = 0$ l'équation d'un plan générique passant par O. Finalement choisissons $g := x_0 g_{d-1} + g_d$ avec $g_{d-1} \neq 0$ et en sorte que $pgcd(g, hq') = 1$. Si $q := h^{d-l-1}q'$ et $t_i = x_i$ pour $i = 1, \ldots, n$, l'application $T_{g,q,t}$ fait l'affaire par le lemme précédent. □

Soient $F \in \mathbf{Cr}(\mathbf{P}^n)$ et $X \subset \mathbf{P}^n$ une sous-variété (irréductible). On dira que F est génériquement injective sur X s'il existe un ouvert non vide $U \subset \mathbf{P}^n$ intersectant X sur lequel F est définie et injective. La preuve du lemme suivant est triviale.

Lemme 4. *Soient $F = F_1 \circ \cdots \circ F_r$ avec $F_i \in \mathbf{Cr}(\mathbf{P}^n)$ et $X \subset \mathbf{P}^n$ une sous-variété sur laquelle F n'est pas génériquement injective. Alors, il existe $1 \leq i \leq r$ tel que X est birationnellement équivalente à une sous-variété sur laquelle F_i n'est pas génériquement injective.*

Preuve du théorème. Observer que l'ensemble des hypersurfaces sur lesquelles une transformation de Cremona n'est pas génériquement injective est fini. D'après le corollaire 3 et le lemme 4 il suffit donc de construire une famille non dénombrable d'hypersurfaces de $\mathbf{P}^n$ d'un certain degré $l \geq 1$, deux à deux non birationnellement équivalentes, qui contiennent $O = [1, 0, \ldots, 0]$ comme point de multiplicité exactement l.

Considérons la famille d'hypersurfaces d'équation $q(x_1, x_2, x_3) = 0$ où $q = 0$ définit une courbe lisse C_q de degré l sur le plan d'équations

$x_0 = x_4 = \cdots = x_n = 0$; la surface $q = 0$ est birationnellement équivalente à $\mathbf{P}^{n-2} \times C_q$ et ensuite deux telles surfaces $q = 0$ et $q' = 0$ sont birationnellement équivalentes si et seulement si C_q et $C_{q'}$ sont (abstraitement) isomorphes. La preuve suit du fait que, déjà pour $l = 3$, l'ensemble des classes d'isomorphismes de cubiques planes lisses est une famille à un paramètre (voir [chap.IV,thm.4.1 et prop.4.6, **1**]. $\square$

Remarque. L'argument ci-dessus montre que lemme 4 peut être un instrument utile pour décider si une application rationnelle appartient ou pas à un sous-groupe de $\mathbf{Cr}(\mathbf{P}^n)$ dont un sous-ensemble de générateurs est connu; comme cas particulier, par le théorème de M. Noether, une application rationnelle du plan qui contracte une courbe non rationnelle n'est pas de Cremona, ce qui est d'ailleurs bien connu.

J'aimerais remercier la personne qui a référé ce travail par ses remarques enrichissantes.

References

[**1**] R. Hartshorne (1977): Algebraic Geometry. *Springer Verlag.*

[**2**] H.P. Hudson (1927): Cremona transformation in Plane and Space. *Cambridge at the University Press.*

[**3**] S. Katz (1990): Recent Work on Cremona Transformations. *Research Notes in Mathematics, Sundance 90. Edited by D. Eisenbud and C. Huneke.*

[**4**] I. Pan (1998): Les transformations de Cremona stellaires. *Prépublication.*

Ivàn Pan
Instituto de Matemática
UFRGS
91540-000 Porto Alegre, RS
Brasil.

E-mail: pan@mat.ufrgs.br